Чётность

1. Можно ли заменить в равенстве $1 * 2 * \ldots * 10 = 0$ заменить все звёздочки на знаки «$+$» или «$-$» так, чтобы оно стало верным?
2. Можно ли разрезать выпуклый 13-угольник на параллелограммы?
3. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 101$. Разрешается стереть любые два числа и написать их разность. Повторив эту операцию 100 раз, мы получим одно число. Докажите, что оно не может быть нулём.
4. Существует ли замкнутая 51-звенная ломаная, которая пересекает каждое своё звено ровно один раз?
5. Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между единицей и двойкой, двойкой и тройкой, $\ldots$, восьмёркой и девяткой было нечётное число цифр?
6. За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа – мальчики.
7. В роте 100 человек. Каждую ночь дежурят трое. Можно ли так организовать дежурство, чтобы через некоторое время каждый единожды подежурил с каждым?
8. Можно ли натуральные числа $1, 2, \ldots, 101$ разбить на несколько групп, в каждой из которых наибольшее число равно сумме всех остальных чисел этой группы?
9. На 99 карточках пишут числа $1, 2, \ldots, 99$, перемешивают их, раскладывают чистыми сторонами вверх и снова пишут числа $1, 2, \ldots, 99$. Для каждой карточки складывают два её числа и 99 полученных сумм перемножают. Докажите, что результат чётен.
10. Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью и каждые 15 минут поворачивает на $90°$. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только через целое число часов.
11. Три кузнечика на прямой играют в чехарду: каждый раз один из них прыгает через другого (но не двух сразу). Могут ли они после 51 прыжка оказаться на прежних местах?
12. В трёх вершинах квадрата сидели кузнечики. Они стали играть в чехарду: один из кузнечиков прыгает в точку, симметричную относительно другого. Сможет ли хоть один кузнечик попасть в четвёртую вершину?
13. На некотором поле шахматной доски стоит король. Двое по очереди передвигают его по доске. Запрещено возвращать короля на поле, где он только что был. Выиграет тот игрок, кто поставит короля на поле, где король когда-то уже побывал. Кто из игроков может гарантировать себе победу?
14. Прямоугольник $\mathcal{R}$, у которого длины всех сторон – нечётные числа, разрезали на меньшие прямоугольники с целочисленными длинами сторон. Докажите, что среди маленьких прямоугольников есть такой, у которого расстояния до всех сторон прямоугольника $\mathcal{R}$ имеют одинаковую чётность.